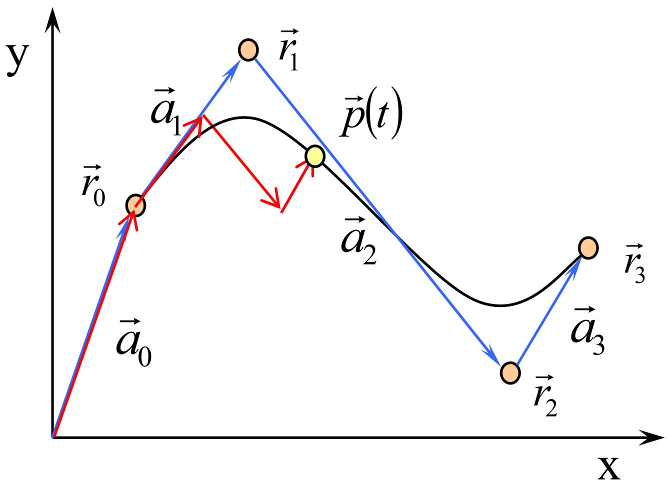
APROKSIMACIJSKE KRIVULJE BEZIERA

Prolaze početnom i krajnjom točkom, a ostalima se samo približava.

a) BEZIEROVE TEŽINSKE FUNKCIJE

Korištenje gibanja vrha sastavljenog otvorenog poligona.



$$\boxed{\vec{p}(t) = \sum_{i=0}^{n} \vec{a}_i f_{i,n}(t) \qquad t \in [0, 1]}$$

$$\vec{a}_0 = \vec{r}_0\,,$$

$$\vec{a}_i = \vec{r}_i - \vec{r}_{i-1}, \qquad i = 1..\, n$$

$n+1$ .. broj točaka.

n .. stupanj krivulje.

a_i .. kontrolni poligon.

$p(t)$ .. točka na krivulji - linearna kombinacija $f_{i,n}(t)$ i a_i.

$f_{i,n}(t)$ .. težinska funkcija - njena vrijednost pokazuje koliko i-ti element poligona pridonosi pripadnoj točki za parametar t.

$f_{i,n}(t)$ - težinska funkcija je općenita i mora zadovoljiti niz posebnih uvjeta:

1. <u>početna točka</u> $p(0) = a_0 \Rightarrow f_{0,n}(0) = 1,$
$f_{\mathrm{i},n}(0) = 0, \quad i = 1 \,..\, n$

2. <u>završna točka</u> $p(1) = \Sigma a_i \Rightarrow f_{i,n}(1) = 1, \quad i = 0 \,..\, n$ zbroj svih vektora

3. <u>osnovni vektor</u> a_1 treba biti paralelan s tangentom u početnoj točki
$$p'(0) = k_1 a_1 \Rightarrow f'_{1,\mathrm{n}}(0) \neq 0,$$
$$f'_{\mathrm{i},n}(0) = 0, \quad i \neq 1$$

4. <u>osnovni vektor</u> a_n treba biti paralelan s tangentom u završnoj točki.
$$p'(1) = k_n a_n \Rightarrow f'_{i,n}(1) = 0, \quad i = 0 \,..\, n\text{-}1,$$
$$f'_{n,n}(1) \neq 0.$$

5. oskulatorna ravnina u početnoj točki treba biti paralelna s a_1 i a_2

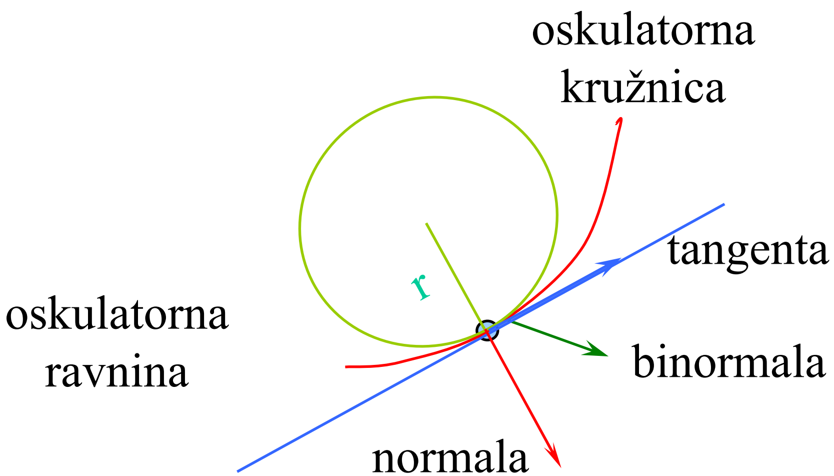
$$\Rightarrow f''_{1,n}(0) \neq 0,\ f''_{2,n}(0) \neq 0,$$
$$f''_{i,n}(0) = 0, \text{ inače.}$$

6. oskulatorna ravnina u završnoj točki treba biti paralelna s a_{n-1} i a_n

$$\Rightarrow f''_{i,n}(1) = 0, \quad i = 0 \,..\, n\text{-}2,$$
$$f''_{n-1,n}(1) \neq 0,\ f''_{n,n}(1) \neq 0.$$

7. simetričnost težinske funkcije - zamjena početne i završne točke povlači promjenu smjera i redoslijeda vektora.

$$\Rightarrow f_{i,n}(t) = 1 - f_{n-i+1,n}(1-t)\,, \quad i = 1 \,..\, n.$$



⇒ BEZIEROVE TEŽINSKE FUNKCIJE

$$f_{i,n}(t) = \frac{(-t)^i}{(i-1)!} \frac{d^{(i-1)}\Phi_n(t)}{d^{(i-1)}t}, \quad \Phi_n(t) = \frac{1-(1-t)^n}{-t},$$

gdje $d^{(i-1)}$ je $(i-1)$ derivacija $\qquad i = 1..n$

rekurzivni oblik pogodan za implementaciju na računalu:

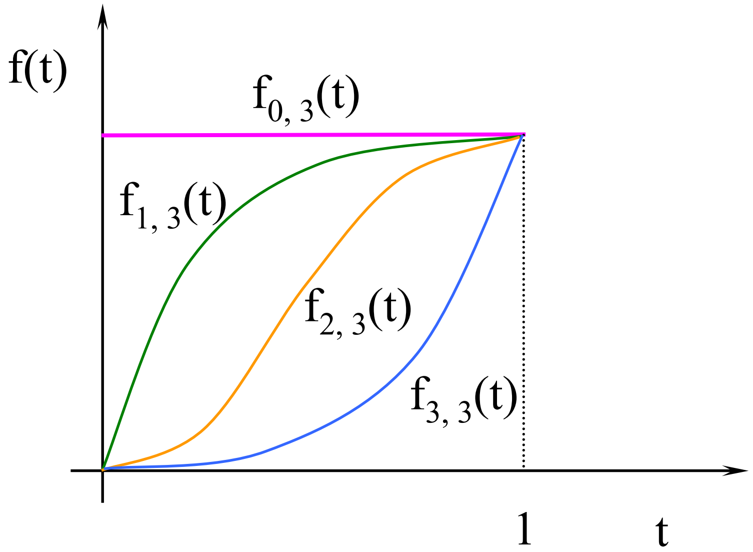
$$f_{i,n}(t) = (1-t) f_{i,n-1}(t) + t\, f_{i-1,n-1}(t),$$

uvjeti zaustavljanja rekurzije

$$f_{0,0}(t) = 1, \quad f_{k+1,k}(t) = 0, \quad f_{-1,k}(t) = 1.$$

* PRIMJER

Odrediti Bezierove težinske funkcije ako su zadane četiri točke.



$$\Phi_3(t) = \frac{1-(1-t)^3}{-t} = -3+3t-t^2,$$

$$f_{i,3}(t) = \frac{(-t)^i}{(i-1)!}\,\frac{d^{(i-1)}\Phi_3(t)}{d^{(i-1)}t},$$

$$f_{0,3}(t) = 1,$$

$$f_{1,3}(t) = 3t-3t^2+t^3,$$

$$f_{2,3}(t) = 3t^2-2t^3,$$

$$f_{3,3}(t) = t^3.$$

$$\vec{p}(t) = \sum_{i=0}^{3} \vec{a}_i f_{i,3}(t),$$

$$\vec{p}(t) = \vec{a}_0 + \left(3t-3t^2+t^3\right)\vec{a}_1 + \left(3t^2-2t^3\right)\vec{a}_2 + t^3\vec{a}_3$$

Provjera postavljenih uvjeta na težinsku funkciju:

1. početna točka $\vec{p}(0)=\vec{a}_0$,
2. završna točka $\vec{p}(1)=\vec{a}_0 + \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3$,

$$\vec{p}'(t)=\left(3-6t+3t^2\right)\vec{a}_1+\left(6t-6t^2\right)\vec{a}_2+3t^2\vec{a}_3,$$

3. derivacija u početnoj točki $\vec{p}'(0)=3\,\vec{a}_1$,
4. derivacija u završnoj točki $\vec{p}'(1)=3\,\vec{a}_3$,

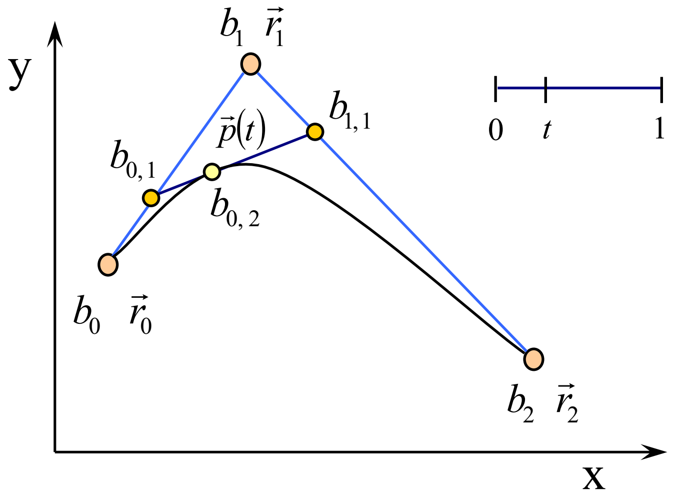
$$\vec{p}''(t)=(-6+6t)\,\vec{a}_1+(6-12t)\,\vec{a}_2+6t\vec{a}_3,$$

5. derivacija u početnoj točki $\vec{p}''(0)=6\left(\vec{a}_2-\vec{a}_1\right)$,
6. derivacija u završnoj točki $\vec{p}''(1)=6\left(\vec{a}_3-\vec{a}_2\right)$,

7. simetričnost $f_{1,3}(t)=1-f_{3,3}(1-t)$.

b) BERNSTEINOVE TEŽINSKE FUNKCIJE

De Casteljau - intuitivna geometrijska konstrukcija

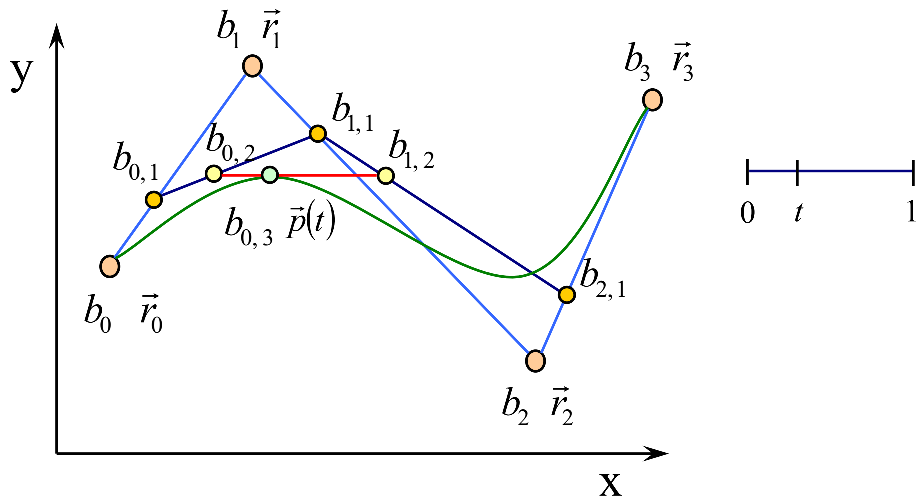


- uzastopne linearne interpolacije :

$$\left.\begin{aligned} b_{0,1} &= (1-t)\,b_0 + t\,b_1, \\ b_{1,1} &= (1-t)\,b_1 + t\,b_2, \end{aligned}\right\} \quad b_{0,2} = (1-t)\,b_{0,1} + t\,b_{1,1}\ ,$$

- uvrstimo :

$$b_{0,2} = (1-t)^2\, b_0 + 2t(1-t)\,b_1 + t^2 b_2$$



- poopćenje ovog postupka daje De Casteljau-ov algoritam

$$b_{i,r} = (1-t)\, b_{i,r-1} + t\, b_{i+1,\, r-1}(t), \quad r = 1..n,\ i = 0..n-r,$$

$$b_{i,0}(t) = b_i \quad \vec{r}_i \text{ vrhovi kontrolnog poligona,}$$

$$b_{0,n}(t) \qquad \vec{p}(t) \text{ točka na krivulji.}$$

$$\boxed{\vec{p}(t) = \sum_{i=0}^{n} \vec{r}_i\, b_{i,n}(t) \qquad t \in [0, 1]} \qquad \text{vrijedi} \qquad \sum_{i=0}^{n} b_{i,n}(t) = 1 \qquad t \in [0, 1]$$

$b_{i,n}(t)$ – bazne funkcije – Bernsteinovi polinomi stupnja n

$$b_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}\, t^i (1-t)^{n-i}$$

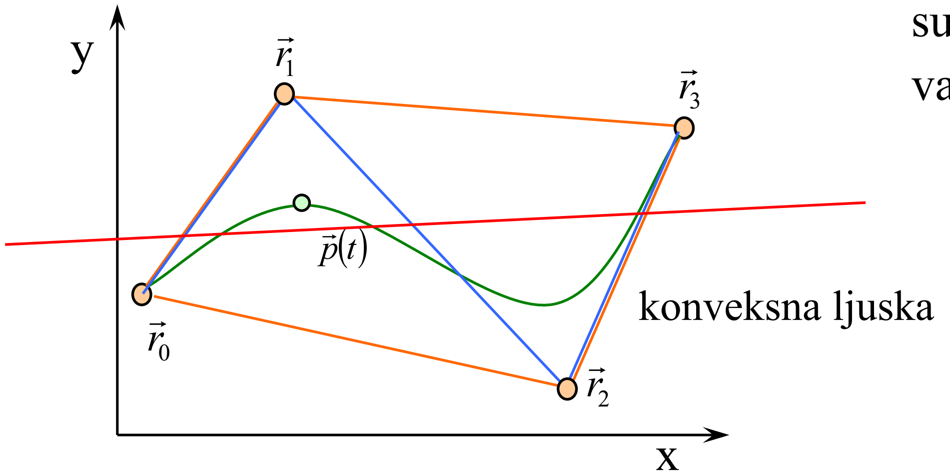
Diskretna binomna razdioba:

t – vjerojatnost događaja u svakom od $n+1$ pokušaja

$b_{i,n}$ – vjerojatnost postizanja točno i događaja u $n+1$ pokušaja

SVOJSTVA APROKSIMACIJSKIH BEZIEROVIH KRIVULJA

- postoji konveksna ljuska



suma težinskih funkcija je 1

važno kod ispitivanja sjecišta krivulje

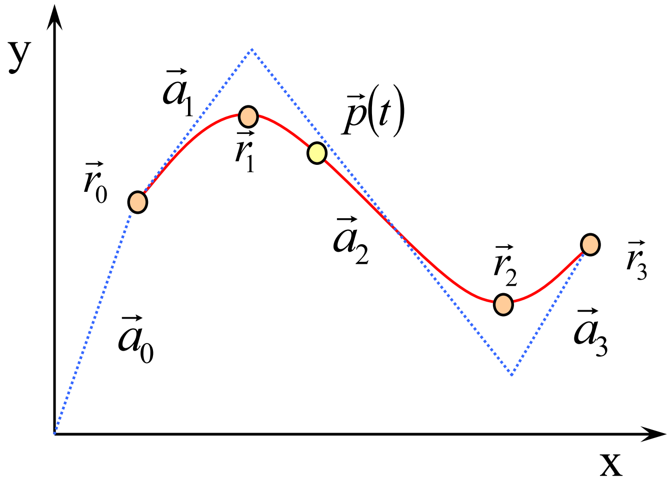
- krivulja nema više valova od kontrolnog poligona

broj sjecišta ravnine i kontrolnog poligona <= br. sjec. ravnine i krivulje

- lokalni nadzor - nije ispunjeno
- broj kontrolnih točaka je u direktnoj vezi sa stupnjem krivulje
- neovisnost o transformacijama (translacija, rotacija, skaliranje)
- simetričnost - kod uvrštenja možemo simetrično zamijeniti popis točaka

INTERPOLACIJSKE KRIVULJE BEZIERA

Prolaze svim zadanim točkama.



$$\vec{p}(t) = \vec{a}_0 + \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i f_{i,n}(t) \qquad t \in [0, 1]$$

$f_{i,n}$ – poznato na osnovi broja točaka

$\vec{a}_i$ – nepoznato – određuje se na temelju nečega poznatog ili željenog o krivulji

Potrebno je poznavati $n+1$ uvjet.

POZNATO

1. n+1 točka krivulje s vrijednošću parametra $\vec{p}_i(t_i), \quad t_i = \dfrac{i}{n}, \; i = 0..n.$

ili

2. tangente u pojedinim točkama $\vec{p}_i'(t_i) = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i f_{i,n}'(t)$.

ili

3. oskulatorne ravnine, položaji centara zakrivljenosti $\vec{p}_i''(t_i) = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i f_{i,n}''(t)$.

INTERPOLACIJSKA KRIVULJA KROZ n+1 TOČKU:

neka su poznate točke $\vec{p}_0 = \vec{p}(t_0), \vec{p}_1 = \vec{p}(t_1), \vec{p}_2 = \vec{p}(t_2), \ldots, \vec{p}_n = \vec{p}(t_n),$

uz parametar $t_i = \dfrac{i}{n}$ gdje $i = 0 .. n.$

$$\vec{p}(t) = \vec{a}_0 + \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i f_{i,n}(t) \qquad t \in [0, 1]$$

$$\begin{bmatrix} \vec{p}_0 \\ \vec{p}_1 \\ \vec{p}_2 \\ \ldots \\ \vec{p}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & f_{1,n}(0) & f_{2,n}(0) & \ldots & f_{n,n}(0) \\ 1 & f_{1,n}(t_1) & f_{2,n}(t_1) & \ldots & f_{n,n}(t_1) \\ 1 & f_{1,n}(t_2) & f_{2,n}(t_2) & \ldots & f_{n,n}(t_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & f_{1,n}(1) & f_{2,n}(1) & \ldots & f_{n,n}(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{a}_0 \\ \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \ldots \\ \vec{a}_n \end{bmatrix}.$$

uvrstili smo : $t_0 = 0, \ t_n = 1.$

uvrstit ćemo:

za početnu točku je $\vec{p}(0) = \vec{a}_0$, tj. $f_{0,n}(0) = 1,\ f_{i,n}(0) = 0,\ i = 1..n,$

za završnu točku je $\vec{p}(1) = \sum_{i=0}^{n} \vec{a}_i$, tj. $f_{i,n}(1) = 1,\ i = 0..n.$

$$\begin{bmatrix} \vec{a}_0 \\ \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \ldots \\ \vec{a}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & f_{1,n}(t_1) & f_{2,n}(t_1) & \ldots & f_{n,n}(t_1) \\ 1 & f_{1,n}(t_2) & f_{2,n}(t_2) & \ldots & f_{n,n}(t_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \vec{p}_0 \\ \vec{p}_1 \\ \vec{p}_2 \\ \ldots \\ \vec{p}_n \end{bmatrix}$$

kada odredimo nepoznate vektore $\vec{a}_i$ možemo do pojedine točke krivulje doći na osnovi Bezijer - ovih ili Bernstein - ovih težinskih funkcija.

* PRIMJER

Odrediti Interpolacijsku Bezierovu krivulju kroz četiri točke korištenjem Bezierovih težinskih funkcija.

Neka su poznate točke $\vec{p}_0 = \vec{p}(0), \vec{p}_1 = \vec{p}(1/3), \vec{p}_2 = \vec{p}(2/3), \vec{p}_3 = \vec{p}(1).$

$$\vec{p}(t) = \vec{a}_0 + \sum_{i=1}^{3} \vec{a}_i f_{i,3}(t) \qquad t \in [0, 1].$$

Iz prethodnog primjera za aproksimacijske Bezijerove krivulje poznate su težinske funkcije.

$$f_{0,3}(t) = 1,$$
$$f_{1,3}(t) = 3t - 3t^2 + t^3,$$
$$f_{2,3}(t) = 3t^2 - 2t^3,$$
$$f_{3,3}(t) = t^3.$$

$$\begin{bmatrix} \vec{a}_0 \\ \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vec{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{19}{27} & \frac{7}{27} & \frac{1}{27} \\ 1 & \frac{26}{27} & \frac{20}{27} & \frac{8}{27} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \vec{p}_0 \\ \vec{p}_1 \\ \vec{p}_2 \\ \vec{p}_3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{p}(t) = \vec{a}_0 + \left(3t - 3t^2 + t^3\right) \vec{a}_1 + \left(3t^2 - 2t^3\right) \vec{a}_2 + t^3 \vec{a}_3$$