3. Spline Curves

3.1 Uvod

Osnovna namjena ovog poglavlja je prikaz postupaka za aproksimaciju ili interpolaciju krivulja kroz zadane tačke. Polinomi pomoću kojih se krivulja aproksimira ili interpolira kroz zadane tačke mogu biti različiti. Postupak se može provoditi s nehomogenim i s homogenim koordinatama. Budući da krivulje mogu duž luka imati znatne promjene zakrivljenosti, nagiba ili torzije, to bi općenito bilo potrebno upotrijebiti polinome vrlo visokog stepena. Ovo se izbjegava segmentiranjem krivulja u pogodne odsječke. Na granici odsječaka mora vladati jednakost koordinata, nagiba, zakrivljenosti, torzije. Govori se o krivuljama sličnim krivulji elastične letvice, koja pomenute zahtjeve ispunjava u određenoj mjeri. Segmentiranjem krivulja izbjegava se i problem valovitosti između zadanih tačaka, koja se može pojaviti ako je stepen polinoma previsok.

Pri grafičkom prikazivanju krivulja treba razlikovati:

- izvornu krivulju, koja u općem slučaju nije opisana, ili definirana analitičkim izrazom;
- izračunatu aproksimacijski ili interpolacijsku krivulju kroz zadane tačke. Isti skup tačaka može određivati razne krivulje;
- krivulju koju će prikazati računar. To je najčešće izlomljena linija.

3.2 Sastavljene krivulje koje sliče elastičnoj krivulji crtaće letvice

Pojedine krivulje ne mogu se dovoljno dobro prikazati razlomljenim funkcijama. Za njihov prikaz trebalo bi upotrijebiti razlomljene funkcije reda višeg od tri. Upotreba funkcija višeg reda od tri zahtijeva mnogo više raznih operacija, pa se zbog toga pristupa rastavljanju zadanih krivulja na segmente. Segmenti moraju biti odabrani tako da se za opis svakog segmenta može koristiti već upotrijebljenim funkcijama. Osnovni zahtjev pri izradi ovakve sastavljene krivulje jeste njena kontinuiranost. Način prikaza potpuno je analogan iscrtavanju krivulja pomoću crtaćih letvica. Crtač odredi neke tačke kroz koje krivulja mora prolaziti, zatim uzme crtaću letvicu, optereti je utezima tako da prolazi kroz zadane tačke i iscrta krivulju. Tako se dobije interpolacijska krivulja. U drugom slučaju, krivulja koja se iscrtava nije jednaka zamišljenoj krivulji u svim njezinim tačkama, već je stanovita aproksimacija te krivulje. Osnovno svojstvo dobivene krivulje je da su, u tačkama u kojima je letvica vanjskim silama dovedena u zadani položaj, prva i druga derivacija krivulje desno i lijevo od prisilne tačke međusobno izjednačene:

$$K'_{\text{lijevo}} = K'_{\text{desno}} \quad \text{i} \quad K''_{\text{lijevo}} = K''_{\text{desno}}$$

Zakon koji određuje savijanje crtaće letvice je zakon koji definiše diferencijalnu jednačinu elastične linije deformirane grede.

Općenito, zakrivljenost krivulje $y = y(x)$, u jednoj zadanoj tački T, kojoj je apscisa x, određena je izrazom:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y'(x)}{\left[1 + y'^2(x)\right]^{3/2}} \qquad \text{gdje je: } y' = \frac{dy}{dx} \quad \text{i} \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Ako je $y'(x)$ tako mala veličina da se može zanemariti, a to je slučaj ako tangenta na tačke posmatrane krivulje zatvara mali kut sa osom x (što je uglavnom slučaj kod elastične linije deformirane grede), dobiće se izraz:

$$\frac{1}{\rho} = y''(x)$$

Iz teorije savijanja poznato je da je zakrivljenost grede u nekoj njenoj tački određena izrazom:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_f}{EI_x}$$

ili:

$$y''(x) = \frac{M_f}{EI_x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_f}{EI_x}$$

gdje je:

M_f - momenat savijanja koji djeluje na gredu (linearna funkcija od x),
E - Youngov modul elastičnosti
I_x - momenat inercije presjeka grede.

Rješenje ove jednadžbe je kubna jednadžba (koja sadrži x^3). Ako se želi krivulju, koja nije zadana analitički, sastaviti iz segmenata, pri čemu svaki od segmenata mora zadovoljavati zakon elastične crtaće letvice, tada moraju biti zadovoljeni slijedeći uvjeti:

$$V_p = V_q \;, \quad V'_p = V'_q \quad \text{i} \quad V''_p = V''_q$$

gdje je V_p krajnja tačka prethodnog segmenta, a V_q početna tačka idućeg segmenta. Zakon savijanja crtaće letvice pokazuje da deformacija ima oblik kubne funkcije

M. E. Mortenson, *Geometric Modeling*, John Wiley & Sons, New York, 1985, **Chapter 2 Curves, p. 98-9:**

2.13 Spline Curves

The spline curves is perhaps the single most important curve in both the aircraft and shipbuilding industries. A drafting tool called a **spline** is a strip of plastic or other material that is easily flexed to pass through a series of key design points (control points) already established on a drawing. Weights called **ducks** hold the spline in place while the draftsman uses the spline as a guide to draw a smooth curve formed by it through the design points. A spline curve can be drawn through any set of n points that imply a smooth curve. The rate of change of curvature is gradual, and there are no kinks.

A spline behaves structurally exactly like a beam, with bending deflections forming it into a smooth curve. As long as the distribution of control points and the material and stiffnes of the spline allow the spline to deform elastically, any spline will form the same curve for the same set of control points. This curve is often called an elastic curve, or minimum-energy curve.

The most commonly used spline curve is a plane curve, and the material of the most common type of spline tool produces a linear realtionship between stress and strain in the elastic range. This results in a bending deflection curve that can be defined by a cubic function. Thus, the development that follows addresses plane cubic spline curves and how we represent them exactly by piecewise parametric cubic curves.