Crtanje krivulja

Mnogi objekti iz stvarnog svijeta, ali i iz virtualnih svjetova, koji se prikazuju primjenom računarske grafike, omeđeni su glatkim krivuljama ili plohama. Najčešći je slučaj da egzaktan matematički model takvog objekta ne postoji, ili je presložen za primjenu u stvarnom vremenu. Stoga je nužno kreirati približan matematički model koji omogućava grafičko predstavljanje objekta na zadovoljavajući način.

Najjednostavniji pristup modeliranju krivulje je **linearna aproksimacija** (prvog reda) **po dijelovima** (Slika 3.11). Krivulja se aproksimira višestrukim crtama (niz povezanih ravnih crta) ili mnogokutima. Točnost aproksimacije određena je brojem linearnih segmenata kojima se aproksimira pojedini dio krivulje. Za visoku razinu podudarnosti linearnog aproksimacijskog modela i željene, krivulje potreban je veliki broj linearnih segmenata.

Sl. 1. Primjer modeliranja krivulje linearnim segmentima.

Veća razina podudarnosti, odnosno bolja aproksimacija, uz manji broj pojedinačnih segmenata, može se ostvariti primjenom **aproksimacija višeg reda**. Najčešće se koriste aproksimacije trećeg reda, jer aproksimacije nižeg reda ne daju dovoljno fleksibilnosti za oblikovanje različitih krivulje, a aproksimacije višeg reda su računski zahtjevnije i složenije za primjenu.

Postoji više oblika matematičkog prikaza krivulja za aproksimacije višeg reda: **eksplicitni**, **implicitni** i **parametarski**.

U slučaju primjene **parametarskog oblika** jednadžbe krivulje, sve tri koordinate izražene su kao funkcije parametra t: x=x(t), y=y(t), z=z(t).

Parametarski oblik jednadžbe krivulje nema nedostatke eksplicitnog i implicitnog oblika, te je stoga najprikladniji za modeliranje krivulja u računarskoj grafici.

Parametarske krivulje trećeg reda

Parametarske krivulje trećeg reda najčešće se koriste za modeliranje krivulja u računarskoj grafici, jer omogućavaju dovoljno fleksibilnosti za oblikovanje različitih krivulja, uz prihvatljivu razinu složenosti. Model krivulje se specificira po odsječcima - polinomima trećeg reda. Svaki odsječak Q opisan je s tri funkcije (polinoma trećeg reda) x, y i z, parametra t, na slijedeći način: **Q**(t) = [x(t) y(t) z(t)] gdje je

$x(t) = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x$
$y(t) = a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y$
$z(t) = a_z t^3 + b_z t^2 + c_z t + d_z$
uz $0 < t < 1$.

Ako definiramo vektor potencija parametra t, na slijedeći način:

$\mathbf{T} = [t^3 \;\; t^2 \;\; t \;\; 1]$

te matricu koeficijenata triju polinoma, na slijedeći način:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ d_x & d_y & d_z \end{bmatrix}$$

tada možemo pisati izraz za model odsječka krivulje u sažetom obliku:

$Q(t) = \mathbf{T}\,\mathbf{C}$.

Deriviranjem prethodnog izraza, dobit će se izraz za vektor smjera tangente:

$$\frac{d}{dt}Q(t) = Q'(t) = \begin{bmatrix} 3t^2 & 2t & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{C} .$$

Cjeloviti model željene krivulje tvori se sastavljanjem modela pojedinih odsječaka. Razina glatkoće krivulje na spoju dvaju odsječaka izražava se u smislu dviju vrsta kontinuiteta:

- geometrijskog kontinuiteta G,
- parametarskog kontinuiteta C.

Geometrijski kontinuitet definiran je na slijedeći način:

- geometrijski kontinuitet G^0 - neprekinutost krivulje u točki dodira odsječaka,
- geometrijski kontinuitet G^1 - jednakost vektora smjera tangente u točki dodira odsječaka.

Parametarski kontinuitet definiran je na slijedeći način:

- parametarski kontinuitet C^1 - jednakost parametara t u točki dodira odsječaka,
- parametarski kontinuitet C^n - jednakost n-te derivacije Q(t) u točki dodira odsječaka.

Odnos parametarskog i geometrijskog kontinuiteta može se sažeti na slijedeći način:

$C^1 \Rightarrow G^1$

tj. parametarski kontinuitet implicira geometrijski kontinuitet, dok obrnuto općenito ne vrijedi.

Definicija odsječka krivulje Q(t)

Polinom trećeg stupnja, kao model odsječka krivulje, ima 4 nepoznata koeficijenta, što zahtijeva 4 uvjeta za njihovo određivanje. Na taj način dobija se sistem od ukupno 4 jednadžbe s 4 nepoznanice. Uvjeti mogu biti: krajnje tačke, vektor smjera tangente, ili kontinuitet u tačkama dodira pojedinih odsječaka.

S obzirom na izbor vrste uvjeta definirane su različite vrste krivulja. Osnovne vrste su:

- **Hermiteove krivulje** (uvjeti su: dvije krajnje točke i dva vektora smjera u krajnjim točkama),
- **Bezierove krivulje** (uvjeti su: dvije krajnje točke i dvije dodatne točke koje određuju vektore smjera u krajnjim točkama),
- **B-krivulje i b-krivulje** (uvjeti su: četiri kontrolne točke).

Hermiteove krivulje i Bezierove krivulje zadovoljavaju kriterije G^1 i C^1 kontinuiteta uz određene uvjete, dok B-krivulje zadovoljavaju kriterije C^1 i C^2 kontinuiteta.

Matrica koeficijenata C može se izraziti kao umnožak bazne matrice M i geometrijskog vektora G koji sadrži zadane geometrijske uvjete (npr. koordinate tačaka):

$$\mathbf{C} = \mathbf{M}\,\mathbf{G}$$

Izraz za parametarski model odsječka krivulje tada možemo napisati na slijedeći način:

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{T}\,\mathbf{M}\,\mathbf{G}$$

Promatramo li samo jednu komponentu vektora **Q**(t), npr. x(t), dobivamo slijedeći izraz:

$$x(t) = \mathbf{T}\,\mathbf{M}\,G_x$$

Označimo li umnožak vektora **T** i matrice **M** s **B** (**B**=**TM**) možemo pisati :

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{B}\,\mathbf{G}$$

Elementi matrice **B** su polinomi trećeg reda parametra t. Na taj način, vidimo da je krivulja predstavljena kao težinski zbroj elemenata geometrijskog vektora, gdje su težinski faktori polinomi parametra t.

Za svaku pojedinu vrstu krivulja definirana je bazna matrica **M** i geometrijski vektor **G**.

Sve skupine krivulja, predstavljene matričnim umnoškom **Q**(t)=**TMG,** moguće je međusobno pretvarati iz jednih u druge. Npr. krivulje predstavljene baznom matricom $\mathbf{M}_1$ i geometrijskim vektorom $\mathbf{G}_1$ moguće je predstaviti drugom baznom maticom $\mathbf{M}_2$ i odgovarajućim geometrijskim vektorom $\mathbf{G}_2$. Važno je da mora biti ispunjen uvjet:

$$\mathbf{M}_2\,\mathbf{G}_2 = \mathbf{M}_1\,\mathbf{G}_1$$

Nepoznati geometrijski vektor $\mathbf{G}_2$ može se izračunati na slijedeći način:

$$\mathbf{G}_2 = \mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{M}_1\,\mathbf{G}_1$$

Na taj način može se npr. krivulja predstavljena baznom matricom i geometrijskim vektorom za Hermiteove krivulje transformirati u prikaz baznom matricom i geometrijskim vektorom za Bezierove krivulje. Različite vrste krivulja imaju različite prednosti za pojedine vrste primjena. Prednosti različitih vrsta krivulja mogu se najbolje iskoristiti u kombiniranom načinu prikaza krivulja. Često se krivulja se predstavlja korisniku putem sučelja kao Bezierova ili Hermiteova, dok je unutrašnja reprezentacija B-krivulja. Npr. u PostScript-u se krivulje predstavljaju korisniku kao Hermiteove dok im je unutrašnja predstava Bezierova.

Kriteriji za izbor vrste krivulje uključuju:

- prikladnost za interaktivnu manipulaciju,
- stupanj kontinuiteta,
- općenitost,
- brzinu proračuna.

Bezierove i Hermiteove krivulje posebice su prikladne za interaktivnu manipulaciju zbog razumljivosti djelovanja korisnika putem kontrolnih točaka i vektora tangenti. B-krivulje prikladne su za unutarnje predstavljanje krivulja zbog svoje općenitosti.

Bezierove krivulje

Bezierove krivulje definirane su sljedećim geometrijskim uvjetima:

- dvije krajnje točke P_1 i P_2.
- dvije kontrolne točke P_3 i P_4 koje određuju vektore smjera u krajnjim točkama R_1 i R_4.

Pomoću dviju kontrolnih točaka posredno su definirani vektori smjera tangenti R_1 i R_4 u dvjema krajnjim točkama. Vektor smjera tangente u početnoj točci odgovara derivaciji krivulje **Q**(t) za vrijednost parametra t=0, dok vektor smjera tangente u krajnjoj točci odgovara derivaciji krivulje **Q**(t) za vrijednost parametra t=1:

$$R_1 = \mathbf{Q}'(0) = 3(P_2-P_1)$$

$$R_4 = \mathbf{Q}'(1) = 3(P_4-P_3)$$

Elementi geometrijskog vektora su četiri zadane točke. Geometrijski vektor za Bezierove krivulje definiran je na sljedeći način:

$$G_B = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix}$$

Bazna matrica za Bezierove krivulje definirana je na sljedeći način:

$$\mathbf{M_B} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Imajući u vidu da je odsječak krivulje opisan izrazom:

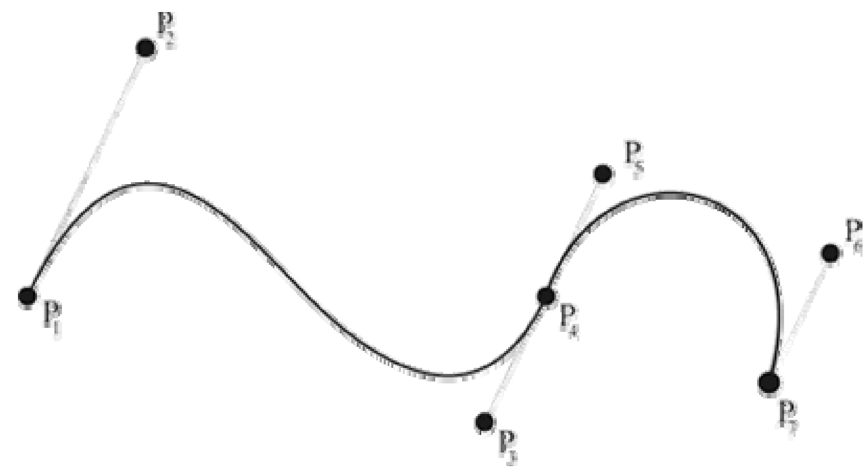
$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{T}\ \mathbf{M_B}\ \mathbf{G_B}$$

uvrštenjem bazne matrice i geometrijskog vektora dobivamo sljedeći oblik jednadžbe odsječka Bezierove krivulje:

$$\mathbf{Q}(t) = (1-t)^3\ P_1 + 3t\ (1-t)^2\ P_2 + 3t^2\ (1-t)\ P_3 + t^3\ P_4$$

Polinomi koji predstavljaju koeficijente pojedinih točaka u ovom izrazu nazivaju se Bernsteinovi polinomi. Na slici 3.13 a) prikazan je primjer crtanja odsječka Bezierove krivulje, a na slici 3.13 b) primjer dvaju spojenih odsječaka Bezierovih krivulja.

a)



b)

Slika 3.13 a) Primjer crtanja odsječka Bezierove krivulje, b) Primjer dvaju spojenih odsječaka Bezierovih krivulja.

Uvjet za G^1 kontinuitet jest da točke P_3, P_4 i P_5 moraju biti različite i kolinearne

$$P_3 - P_4 = k\,(P_4 - P_5), \quad k > 0$$

Uvjet za C^1 kontinuitet jest da je $k = 1$.